



TITLE:

Vermaの問いについて(Blow-up ringsの環論的研究)

AUTHOR(S):

吉田, 健一

CITATION:

吉田, 健一. Vermaの問いについて(Blow-up ringsの環論的研究). 数理解析研究所講究録 1992, 801: 122-133

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82859>

RIGHT:

Verma の問いについて

名古屋大学理学部 吉田 健一 (Ken-ichi Yoshida)

§ 0 Introduction

この報告の中では、 (A, m, k) は CM local ring とし、
 $\#k = \infty$ とする。

このとき、 A が minimal multiplicity (CM with m.m.) を
持つとは、

$v = e + d - 1$ ここに、 $v = \text{emb}(A)$, $d = \dim A$, $e = e(A)$.
が成立することと定義する。

Definition(0.1) (reduction exponent)

I, J を A の ideal とする。

J が I の minimal reduction とするとき、

$$r_J(I) = \inf \{n \geq 0 \mid I^{n+1} = JI^n\}.$$

$$r(I) = \inf \{r_J(I) \mid J: I \text{ の minimal reduction}\}.$$

これを I の reduction exponent と呼ぶ。

A の ideal I を固定したとき、

$$S = A[It], \quad T = A[It, t^{-1}], \quad G = \text{gr}_I(A) \text{ とおく。}$$

$$\text{また、} M = (m, It)S, \quad N = (t^{-1}, m, It)T \text{ とおく。}$$

このとき、次のように解釈する。 (T, G) も

$$S:CM \text{ with m.m.} \iff S_M:CM \text{ with m.m.}$$

Verma は、 S が CM with m.m. ならば、 A もそう。また、 T が CM with m.m. で、 I が $I=m, I=m^2, I\subseteq m^3$ のいずれかならば、 A もそうであることを示し、次の問いを出した。

Question

$$T:CM \text{ with m.m.} \implies A:CM \text{ with m.m.} ?$$

これは、任意の次元で正しくないことを示す。

§1 $G(I)$ が CM with m.m. となる ideal について

Lemma(1.1)

$(A, m, k):$ a CM local ring. $\#k = \infty$.

$\tau(A) = A$ の CM type. このとき、つぎは同値。

(1) A は minimal multiplicity を持つ。

(2) $m^2 = Im$ ($\exists(\forall) I: m$ の minimal reduction).

(3) $\exists J: A$ の parameter ideal s.t. $m^2 \subseteq J$.

(4) $\tau(A) = e - 1$. または、 A は R.L.R.

A が R.L.R. でないとき、(1.1)(3)の J は m の minimal reduction になる。

Definition. (1.2)(G. Valla)

$(A, m, k):$ a CM local ring. $\#k = \infty$. $\sqrt{I} = m$.

$I: \text{stable} \iff I^2 = JI$ ($\exists J: I$ の minimal reduction).

どのような ideal が、 G を CM with m.m. にするかを考える。

Theorem(1.3)

$(A, m, k):$ a Gorenstein local ring, $\#k = \infty$.

$\sqrt{I} = m$ とし、 $G = G(I)$, $M = mG + G_+$, $S = R'(I)$,

$N = (t^{-1}, m, It)$ と置く。 このとき、次は同値。

(1) $G(I): CM$ with m.m.

(2) $m^2 \subseteq I, Im = Jm, I^2 = JI.$

($\exists J: A$ の parameter ideal. s.t. $J \subseteq I.$)

(3) I は次のいずれか。

(7) $I: A$ の parameter ideal s.t. $m^2 \subseteq I.$

(4) $m \sim I, m^2 \subseteq I.$

さらに、 I が parameter ideal でなければ、次も同値。

(4) $m^2 \subseteq I, \lambda(A/I) = e(I) - 1.$

ただし、 $(1) \iff (2)$ の同値性には、Gorenstein は不要。

Remark(1.4)

$(A, m, k):$ a local ring. $\# k = \infty.$

$\sqrt{I} = m, G = G(I), M = mG + G_+$ とおく。

このとき、 $e(G) = e(I).$

< Theorem の証明の概略 >

$(1) \implies (2):$

I の minimal reduction $J = (x_1, \dots, x_d)$ を取る。

$G_M: CM$ with m.m. だから、 x_1, \dots, x_d の initial term

の生成する ideal J° は、 G において M の mininmal

reduction を生成し、 $M^2 = J^\circ M$.

各次数ごとに比較して、

$$m^2 + I = I, \quad Im = Jm + I^2, \quad IJ + I^3 = I^2.$$

$$\therefore m^2 \subseteq I, \quad Im = Jm, \quad I^2 = JI.$$

(2) \Rightarrow (1):

$$I^2 = JI \text{ だから、} \text{emb}(G_M) = \lambda(m/I + m^2) + \lambda(I/mI).$$

また、 G は CM.

$$e(G_M) = e(I) = e(J) = \lambda(A/J)$$

$$m^2 \subseteq I, \quad Im = Jm \text{ だから、}$$

$$\begin{aligned} \text{emb}(G_M) &= \lambda(m/I) + \lambda(I/mI) = \lambda(m/Im) = \lambda(m/Jm) \\ &= \lambda(A/J) + \lambda(J/Jm) - \lambda(A/m) \\ &= e(G_M) + d - 1. \end{aligned}$$

ゆえに、 G_M は CM with m.m.

以下、 A を Gorenstein とする。

(3) \Rightarrow (2):

I が parameter ideal の時は、 $I = J$ とすればよい。

I は parameter ideal でないとする。

$I = J : m$ ($\exists J : A$ の parameter ideal) と書ける。

Case 1 : $m^2 \subseteq J$ の時

Lemma(1.1)から、 A は CM with m.m.

A が R.L.R. でなければ、 J は m の minimal reduction

になるから、 $m \subseteq J:m = I. \therefore m = I$ で、o.k.

Case 2 : $m^2 \not\subseteq J$ の時

$J \neq m^2 + J \subseteq J:m$ ゆえ、 $I = J:m = m^2 + J$.

$\lambda(I/J) = 1$ だから、 $I = J + (x)$, $x \in m^2 \setminus J$ と表せる。

$\forall a \in Im$ を取る。

$a \in J := (x_1, \dots, x_d)$ だから、 $a = \sum a_i x_i (a_i \in A)$ と書く。

$a_i \in A \setminus m$ と仮定。

$x_1 \in (x_2, \dots, x_d) + Im$ となり、 $I = (x_2, \dots, x_d, x) + Im$.

N A Kから、 $I = (x_2, \dots, x_d, x)$ となり、仮定に反する。

$\therefore a_i \in m (\forall i). \therefore Im \subseteq Jm. \therefore Im = Jm$.

他方、 $m^3 + Jm = Im = Jm$ ゆえ、 $m^3 \subseteq Jm. \therefore m^4 \subseteq Jm^2$.

$\therefore I^2 = m^4 + J(m^2 + J) = J(m^2 + J) = JI$.

(2) \Rightarrow (3):省略。

さらに、 I は parameter ideal でないとする。

(4) \Rightarrow (3): $J \subseteq I$ を I の minimal reduction とする。

A は Gorenstein ゆえ、 $m = J:I$, $J:m \subseteq I$.

$\therefore \lambda(A/I) = \lambda(A/J:m) - \lambda(I/J:m) = e(I) - 1 - \lambda(I/J:m)$.

$\therefore I = J:m. \therefore I \sim m$.

(3) \Rightarrow (4):上と同様。

Q E D

Corollary. (1.5)

$(A, m, k) : \text{a local ring. } \sqrt{I} = m.$

$G(I) : \text{C M with m.m.} \iff T = R'(I) : \text{C M with m.m.}$

$\langle \text{Pr} \rangle N = (t^{-1}, m, It) T, \quad K = (t^{-1}, Jt) \subseteq N$ と置くと、

$N^2 = K N$ で、 $K S_N$ は $N S_N$ の minimal reduction

である。 Q E D

Example (1.6)

$(A, m, k) : 1\text{次元 Gorenstein local ring. } \# k = \infty.$

$I : A$ の ideal, $\sqrt{I} = m.$

$G(I)$ が C M with m.m. となるのは、次の場合である。

(1) $r(m) = 0$ ($A : \text{D.V.R.}$ の場合), $I = m, m^2.$

(2) $r(m) = 1.$

① $I = m$ か、その minimal reduction, $\tau(G) = 1.$

② $I = m^2, \quad \tau(G) = 3.$

③ $I = J : m = m^2 + J$ ($\exists J : A$ の parameter ideal.

s. t. $e(J) = 3 > e = 2, I^2 = JI$), $\tau(G) = 2.$

(3) $r(m) = 2$ のとき、 $I = J : m = m^2 + J$

($\exists J : m$ の minimal reduction ; $I^2 = JI$), $\tau(G) = e - 1.$

特に、 $G(A)$ は Gorenstein.

§ 2 Vermaの問いの否定的な解

この section では、次の 2 つの問いに関して、否定的な解を与える。

Question(2.1)(J. K. Verma ; Comm. in Alg. 17(1989))

(A, m, k) : a CM local ring. $\# k = \infty$. $d = \dim A > 0$.

I : A の ideal. このとき、

T : CM with m.m. $\Rightarrow A$: CM with m.m. ?

Question(2.2)(C. Huneke; Amer. J. Math. 104(1981))

(A, m, k) : a Gorenstein local ring.

$I \sim J$ とする。

このとき、 $R(I)$: CM $\Rightarrow R(J)$: CM ?

Proposition(2.3)(Question(2.1)に対する反例)

(A, m, k) : a CM local ring. $\# k = \infty$.

J : m の minimal reduction s.t. $m^3 \subseteq J$. $I := m^2 + J$.

このとき、 G : CM with m.m. かつ、 T : CM with m.m.

特に、 $r(m) = 2$ のときには、このような ideal I が存在

するが、 A 自身は、CM with m.m. ではない。

Thm(1.3)の(1) \implies (2)は、一般には成立しない。

Example(2.4)

$$A = k[[X, Y, Z, W]] / (X^2, XY, XZ, Y^2 - YZ, YZ - Z^2, Z^3)$$

: 1次元 CM, $\tau(A) = 3$.

$J = (W)$, $m = (X, Y, Z, W)$ とおく。

このとき, J は m の minimal reductionで、 $m^3 \subseteq J$.

$m^2 + J \neq J:m$. 実際、 $m^2 + J \not\sim m$.

$I = m^2 + J$ とおくと、 $G(I)$ は CM with m.m.

Proposition(2.5)

(A, m, k) : a Gorenstein local ring which is not a R.L.R. $\#k = \infty$.

J を m の minimal reduction とし、 $I = J:m$ と置く。

$r = r_J(m) \leq 3$ 又は、 $G(A)$ が CM と仮定。

このとき、次が成立。

(1) I は stable, $e = e(G_M)$.

(2) G_M : CM with m.m. $\iff r = 1, 2$.

(3) $\tau(G_M) = 1$ ($r = 1$)

$= v - d + 1$ ($r \geq 2$).

Example(2.6)(Quest. (2.2)の反例)

(A, m, k) : a Gorenstein local ring. $\#k = \infty$.

$d = \dim A \geq 2$, $G(A)$: C M, $r = r(m) \geq d$ とする。

J を m の mininmal reduction とし、 $I = J:m$ とおくと、

$I \sim m$ で、 $R(I)$ は C Mだが、 $R(m)$ は C Mでない。

Example(2.7)

$A = k[[t^4, t^b, t^c]]$, $m = (t^4, t^b, t^c)$.

$(b, 4) = 1$, $b > 4$, $c = 3b - 4$.

このとき、 A は C M, $\tau(A) = 2$.

$I = (t^4, t^{2^b}, t^c)$ と置くと、 $m \sim I$.

$G(I)$ は C M with m.m.

$G(m) = k[X, Y, Z] / (XZ, YZ, Z^2, Y^4)$ は C Mでない。

Reference

[GS] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees Algebras of

Cohen Macaulay local rings. In: Commutative Algebra

(analytic Methods), Lecture Notes in Pure and

Applied Mathematics, Vol. 68, Marcel Dekker, New

York(1982)201-231.

- [Hu1] C. Huneke, Linkage and the Koszul homology of
ideals. *Amer. J. Math.* 104(1981)1043-1062.
- [Hu2] C. Huneke, Complete Ideals in two-dimensional
regular local rings. proceedings of "Microprogram
on Commutative Algebra" held at MSRI, Berkeley,
CA(1987)Springer-Verlag, New York(1989).
- [O] A. Ooishi, Stable ideals in Gorenstein local rings.
J. pure and App. Alg. 69(1990)185-191.
- [Re] D. Rees, Generalizations of reductions and Mixed
Multiplicities, *J. London Math Soc.* (2)29(1984)397
-415.
- [Sa1] J. D. Sally, CM local rings of maximal embedding
dimension, *J. Alg.* 56(1979)168-183.
- [Sa2] J. D. Sally, Tangent cones at Gorenstein
singularities. *Comp. Math.* 40(1980)167-175.
- [Sa3] J. D. Sally, On the Associated graded ring of a
local CM ring. *J. Math Kyoto Univ.* 17(1977)19-21.
- [TI] N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees Algebra
COHEN-MACAULAY? *Comm. in Alg.* 17(1989)2893-2922.

- [Tru] N. V. Trung, REDUCTION EXPONENT AND DEGREE BOUND
FOR THE DEFINING EQUATIONS OF GRADED RINGS.
Proc. AMS. 101(1987)229-236
- [V] G. Valla, On Form Rings which are COHEN-MACAULAY.
J. Alg. 58(1979)247-250.
- [Ve1] J. K. Verma, REES ALGEBRAS WITH MINIMAL
MULTIPLICITY. Comm in Alg. 17(1989)2999-3024.
- [Ve2] J. K. Verma, Rees Algebras of Contrcted Ideals
in Two-Dimensional Regular Local Rings.
J. of Alg. 141(1991)1-10.
- [Ve3] J. K. Verma, Rees Algebras and Mixed Multiplicities.
Proc. AMS. 104(1988)1036-1044.
- [Ve4] J. K. Verma, JOINT REDUCTIONS OF COMPLETE IDEALS.
N. M. J. 118(1990)155-163.
- [VV] P. Valabrega and G. Valla, Form rings and Regular
sequences. N. M. J. 72(1978)93-101.